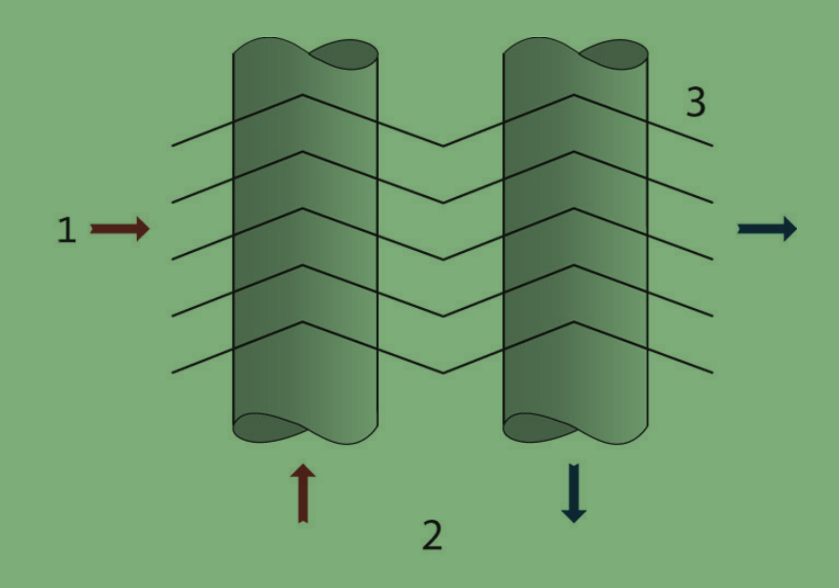
# INTRODUCCIÓN A LOS MODOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR

*por*

LUIS MANUEL MOCHÓN CASTRO

DANILO MAGISTRALI




CUADERNOS

DEL INSTITUTO

JUAN DE HERRERA

DE LA *ESCUELA DE*

*ARQUITECTURA*

*DE MADRID*

**3-89-03**

# INTRODUCCIÓN A LOS MODOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR

*por*

LUIS MANUEL MOCHÓN CASTRO
DANILO MAGISTRALI

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
*ARQUITECTURA*
*DE MADRID*

**3-89-03**

C U A D E R N O S
D E L   I N S T I T U T O
J U A N   D E   H E R R E R A

**NUMERACIÓN**

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

**TEMAS**

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

***Introducción a los modos de transferencia de calor.***

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 395.01 / 3-89-03
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-452-3
ISBN-13: 978-84-9728-453-0
Depósito Legal: M-9137-2013

# Índice

# Introducción

La transferencia de calor es una disciplina de la ingeniería térmica que se refiere a la generación, uso, transformación e intercambio de energía térmica y calor entre los sistemas físicos. La transferencia de calor se clasifica en varios mecanismos, tales como la conducción térmica, convección térmica, radiación térmica, y la transferencia de energía por cambios de fase. Los ingenieros también considerar la transferencia de masa de las diferentes especies químicas, ya sea frías o calientes, para lograr la transferencia de calor. Mientras que estos mecanismos tienen características específicas, a menudo ocurren simultáneamente en el mismo sistema.

La conducción de calor, también denominada **difusión**, es el intercambio directo de la energía cinética microscópica de las partículas a través de la frontera entre dos sistemas. Cuando un objeto está a una temperatura diferente de otro objeto o de su entorno, el calor fluye de manera que el cuerpo y el entorno alcancen la misma temperatura, momento en el que están en equilibrio térmico. Dicha transferencia espontánea de calor siempre se produce a partir de una región de alta temperatura a otra región de temperatura más baja, tal como se describe por la segunda ley de la termodinámica.

La **convección** se produce cuando el flujo de masa de un fluido (gas o líquido) se lleva el calor junto con el flujo de materia en el líquido. El flujo de fluido puede ser forzado por procesos externos, o algunas veces (en campos gravitacionales) por las fuerzas de flotabilidad causada cuando la energía térmica expande el fluido (por ejemplo, en un penacho de fuego), influyendo así en su propia transferencia. Este último proceso es a menudo llamado *convección natural*. Todos los procesos convectivos de calor también se mueven en parte por difusión, también. Otra forma de convección es la convección forzada. En este caso, el fluido es forzado a fluir por el uso de una bomba, ventilador u otros medios mecánicos.

La forma principal final de la transferencia de calor es por **radiación**, que se produce en cualquier soporte transparente (sólido o líquido), pero también puede ocurrir incluso a través el vacío (como cuando el Sol calienta la Tierra). La radiación es la transferencia de energía a través del espacio por medio de ondas electromagnéticas en la misma forma como las ondas electromagnética transfieren luz. Las mismas leyes que rigen la transmisión de luz gobiernan la transferencia de calor radiante.

En física y química, el **calor** es la energía transferida desde un cuerpo a otro por las interacciones térmicas. La transferencia de energía puede ocurrir en una variedad de formas, entre ellas la conducción, la radiación y convección. El calor no es una propiedad de un sistema o cuerpo, sino que siempre está asociado con un proceso de algún tipo, y es **sinónimo de flujo de calor y transferencia de calor**.

El flujo de calor de alta a baja temperatura se produce de forma espontánea, y siempre está acompañada por un aumento en la entropía. Este flujo de energía puede ser aprovechada y parcialmente convertida en trabajo útil por medio de un motor térmico. La segunda ley de la termodinámica prohíbe el flujo de calor directamente desde baja a alta temperatura.

El calor es una característica de los procesos macroscópicos y se describe por la termodinámica, pero su origen y sus propiedades se puede entender en términos de constituyentes microscópicos utilizando la mecánica estadística. Por ejemplo, el flujo de calor puede ocurrir cuando las moléculas que vibran más rápidamente en un cuerpo de alta temperatura transfieren algo de su energía (por contacto directo, el intercambio de radiación, u otros mecanismos) a las moléculas que vibran más lentamente en un cuerpo de menor temperatura.

Se puede decir que la Transmisión de Calor es una ciencia complementaria de la Termodinámica.

## CONDUCCIÓN. Ley de Fourier.

Considérese una pared, cuya sección transversal se muestra en la figura, en la que las superficies extremas se encuentran a temperaturas $T_1$ y $T_2$.

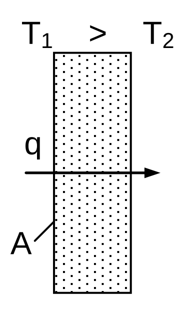



Figura 1.1

Entre ambas superficies se establecerá un flujo de calor en el sentido de las temperaturas decrecientes, por ejemplo hacia la derecha si $T_1 > T_2$. En este caso se dice que el calor (potencia calorífica) se transfiere por conducción, que rige para sistemas en los que hay un gradiente térmico sin movimiento macroscópico entre sus partículas. La conducción tiene lugar típicamente en los sólidos, aunque también es posible en fluidos cuando no exista movimiento del mismo: a) fluidos estratificados verticalmente calentados por arriba o enfriados por abajo (figura 1.2.a) y b) con estratificación térmica no vertical si las diferencias de temperatura son muy pequeñas (figura 1.2.b).

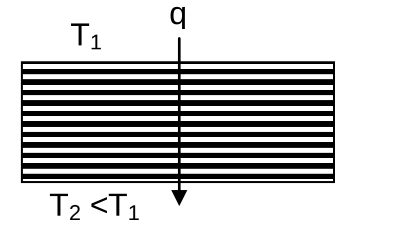




Figura 1.2.a

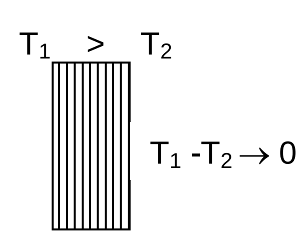



Figura 1.2.b

La transferencia de calor por conducción en los sólidos tiene lugar por intercambio de energía de vibración de la red, y cuando se trata de metales también por el flujo de electrones libres. En los fluidos dicha transferencia es consecuencia de la interacción molecular.

La ecuación que rige la conducción es la ley de Fourier, ley experimental que data de 1822:

$$\vec{q} = -Ak\nabla T$$

siendo:

*A* El área de transferencia de calor.

*k* La conductividad térmica, característica de cada sustancia siendo variable con la temperatura y cuya unidad es:

$$[k] = \frac{W}{m^0C} = \frac{W}{mk}$$

Algunos valores característicos de la conductividad son:

| Material | K [W/m·K] | |
|---|---|---|
| Diamante | ~1100 | ↑ Conductores |
| Plata (mejor metal conductor) | 429 | |
| Cobre | 401 | |
| Oro | 317 | |
| Aluminio | 237 | |
| Estaño | 67 | |
| Acero al carbono | 64 | |
| Cuarzo (en dirección eje principal) | 18,6 | |
| Vidrio pyrex | 1,09 | |
| Agua | 0,611 | |
| Aceite para motores, SAE 50 | 0,145 | |
| Corcho | 0,043 | Aislantes ↓ |
| Aire | 0,027 | |
| Sílica aerogel (humo sólido) | 0,017 | |

$\nabla T$ EL gradiente de temperatura.

Sig - Indica que el flujo calorífico lleva el sentido de las temperaturas decrecientes, tal como establece el Segundo Principio de la Termodinámica.

Obsérvese cómo los metales presentan elevada conductividad térmica, debido a la presencia de electrones libres, razón por la que también son buenos conductores eléctricos. No obstante, la máxima conductividad la ostenta el diamante por su estructura cristalina casi perfecta, lo que favorece de forma extraordinaria la transmisión de la energía térmica a través de la red, incluso sin la existencia de electrones libres. El cuarzo, a pesar de presentar estructura cristalina, contiene gran número de imperfecciones, lo que reduce considerablemente su conductividad, situándose por debajo de los metales.

En los líquidos y gases la energía térmica se transmite por intercambio de cantidad de movimiento entre las moléculas, no siendo este mecanismo de transmisión tan efectivo como los que tienen lugar en los sólidos. Por esta razón, los fluidos, en general, tienen menor conductividad que los sólidos y dentro de éstos, la conductividad de los gases suele ser menor que la de los líquidos.

## CONVECCIÓN. Ley de enfriamiento de Newton.

Es la transmisión de calor entre una superficie (o un cuerpo) y un fluido cuando están a diferentes temperaturas. El proceso real de transferencia de calor entre las moléculas del fluido se realiza por conducción (difusión térmica), viéndose favorecido por el movimiento del fluido (advección), natural o inducido, que siempre tiene lugar. Este movimiento natural está motivado por los cambios de densidad del fluido que se experimentan en las proximidades del cuerpo donde tiene lugar el intercambio de calor. El movimiento inducido, cuando tiene lugar, está provocado por alguna acción mecánica como una bomba, ventilador o compresor. La advección, independientemente de su origen, incrementa la potencia térmica transferida respecto al hipotético caso en el que el fluido estuviese en reposo, donde dicha potencia térmica sólo podría transmitirse por conducción a través del fluido.

Independientemente si hay o no diferencia de temperatura entre el fluido y el cuerpo, si se establece un flujo paralelo a una placa a velocidad incidente $u_\infty$ (figura 1.3.), se desarrollará una zona próxima a la misma donde la velocidad va desde un valor nulo junto a la placa, hasta la velocidad $u_\infty$ en puntos alejados de la misma, en dirección perpendicular a la placa. Esta zona donde se manifiesta cierto gradiente de velocidad entre las partículas del fluido, se denomina capa límite hidrodinámica y su espesor va creciendo en la medida que el flujo avanza por la placa.

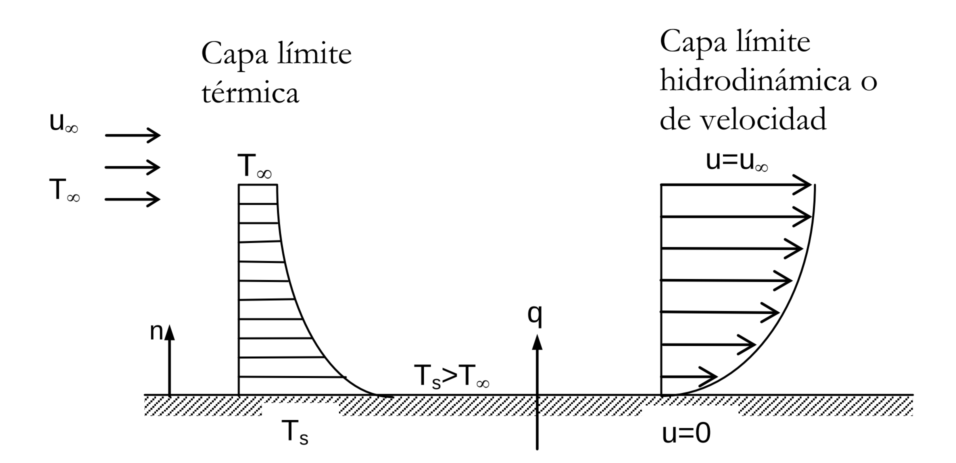



Figura 1.3. Capas límite hidrodinámica y térmica.

Si adicionalmente la temperatura $T_\infty$ de la corriente incidente difiere de la temperatura $T_s$ de la superficie, tendrá lugar un espacio en el que también la temperatura del fluido evoluciona desde $T_s$, junto a la placa, hasta $T_\infty$ en puntos suficientemente alejados de ella. Este espacio de denomina capa límite térmica y su espesor también crece a lo largo de la placa.

La convección se rige por la denominada ley de enfriamiento de Newton (ley experimental):

$$q = hA(T_s - T_\infty) \qquad \text{superficie} \rightarrow \text{fluido}$$
$$q = hA(T_\infty - T_s) \qquad \text{fluido} \rightarrow \text{superficie}$$

siendo:

$A$ Área de intercambio de calor.

$T_s$, $T_\infty$ Temperaturas superficial y de la corriente libre del fluido (la que posee por fuera de la capa límite térmica).

$h$ Coeficiente de película o coeficiente de convección, que expresa la potencia térmica que se transfiere por unidad de área de la superficie y siendo la diferencia de temperatura entre la superficie y la corriente libre de 1ºC (=1 K). h depende de las propiedades del fluido, de la geometría (o forma) de la superficie y de la hidrodinámica o configuración del flujo en torno a la superficie (figura 1.4). La unidad de h es: $[h] = \frac{W}{m^2 C^\circ} = \frac{W}{m^2 K}$

Para facilitar la resolución de problemas suele ser útil expresar la ley de enfriamiento de Newton en términos de la denominada resistencia térmica convectiva:

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{hA}} = \frac{\Delta T}{R}$$

$R = \frac{1}{h\,A}$

q

$\Delta T$

Justo en las proximidades de la pared, donde la velocidad del flujo es prácticamente nula, el calor se transmite exclusivamente por conducción, dado que no existe velocidad relativa entre la superficie y las partículas de fluido adheridas a ella. Por tanto la potencia térmica convectiva también se puede calcular por aplicación de la ley de Fourier a esta capa o lámina de fluido en reposo:

$$q = hA(T_s - T_\infty) = -k_{\text{fluido}} A \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{pared}}$$

Lo que pone de manifiesto el importante papel que juega la conductividad del fluido ($k_{\text{fluido}}$) en la convección, esto es, cuanto mayor sea dicha conductividad tanto más elevada será $q$ y con ello $h$.

Fuera de la zona de baja velocidad próxima a la superficie, la convección está dominada por la advección o movimiento del flujo

Flujo forzado en tubería

Flujo laminar forzado

Convección natural

Flujo turbulento forzado

Turbulento

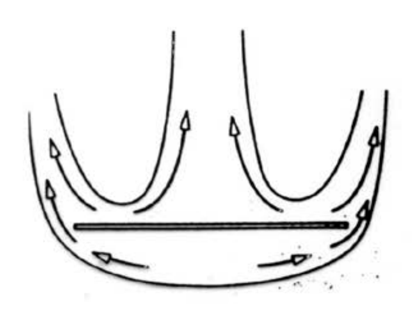
Laminar

Laminar

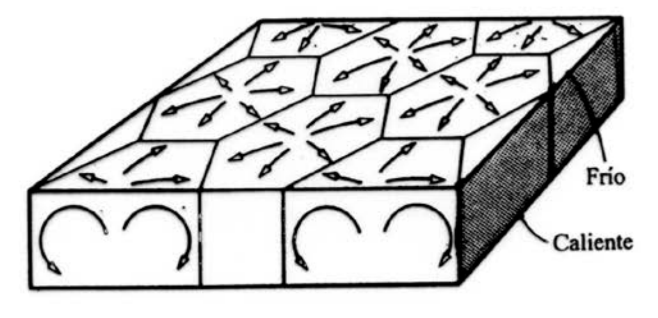
Turbulento

Pared caliente

Pared fría



Convección natural laminar en placa horizontal calentada




Convección natural celular en fluido confinado entre placas horizontales

## Tipos de convección atendiendo a la naturaleza del flujo

*Natural o libre*: el movimiento del fluido está inducido exclusivamente por las fuerzas de flotación que aparecen como consecuencia de diferencias de densidad causadas por gradientes de temperatura en la masa de fluido y en presencia de un campo gravitatorio.

*Forzada*: el movimiento del fluido tiene lugar fundamentalmente por causas externas ajenas al propio fenómeno de la convección, bien por una acción mecánica (ventilador, compresor, bomba, etc), o por efecto del viento, soplado, etc.

*Convección mixta*: en presencia de un fluido donde existe gradiente térmico, prácticamente nunca existe exclusivamente convección forzada, sino la conjunción de la convección natural y la convección forzada, lo que se denomina como convección mixta. Ambas pueden actuar en el mismo sentido, en oposición, en flujos cruzados, etc, pudiéndose ver la transferencia de calor favorecida o perjudicada dependiendo si los efectos natural y forzado se suman o no.

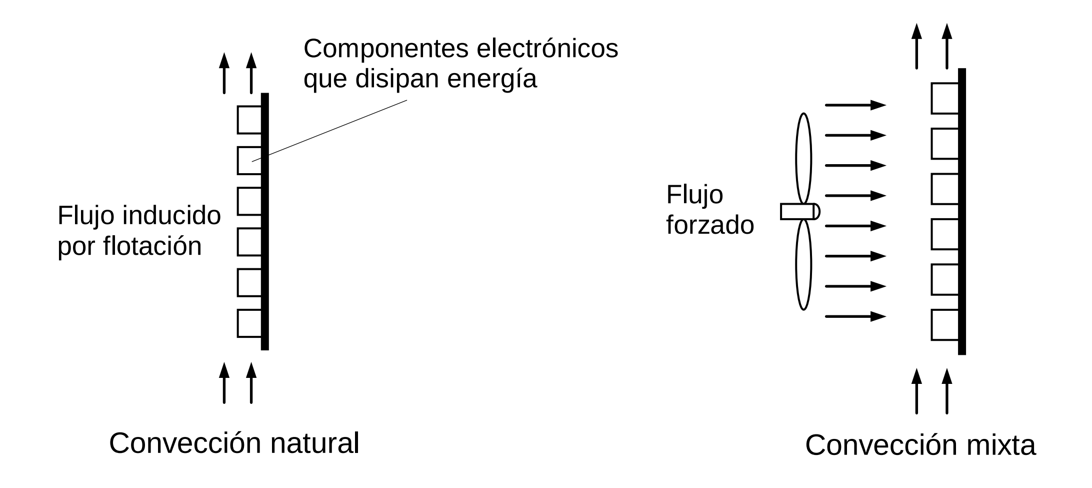



Figura 1.5. Convección natural y mixta.

Valores típicos del coeficiente de convección son:

| | |
|---|---|
| CONVECCIÓN NATURAL<br>Gases<br>Líquidos | h [W/m²-K]<br>2 - 25<br>50 - 1.000 |
| CONVECCIÓN FORZADA<br>Gases<br>Líquidos | <br>25 - 250<br>50 - 20.000 |
| CONVECCIÓN CON CAMBIO DE FASE<br>Ebullición y condensación | 2.500 - 100.000 |

Los mayores valores de la convección con líquidos que con gases se justifica por el hecho que los primeros tienen una conductividad térmica mayor que los segundos. En convección forzada la velocidad característica del fluido suele ser mayor que en convección natural, lo que lleva a menores valores de h en este último caso.

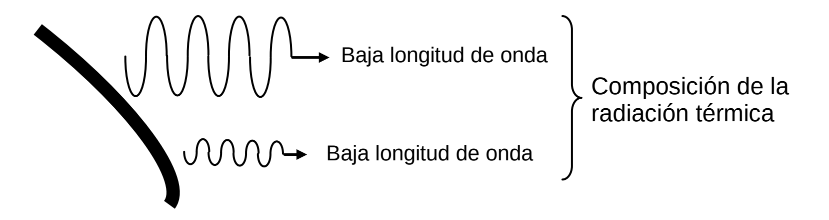
La condensación y ebullición son procesos de convección en los que la transferencia de calor tiene lugar de forma latente en el fluido y con unos coeficientes de convección extraordinariamente elevados.

## RADIACIÓN TÉRMICA. Ley de Stefan-Boltzmann.

Las características más significativas de la radiación térmica son:

- Es una energía en forma de ondas electromagnéticas (fotones) emitida por la materia que está a una temperatura por encima del cero absoluto.

- Abarca un rango de longitudes de onda comprendido entre 0,1 y 100 micras.

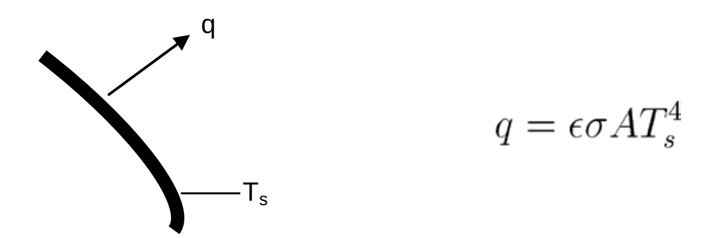



- Se atribuye a cambios en las configuraciones electrónicas de los átomos.

- Tiene lugar desde cualquier porción de materia, ya sea sólido o fluido (líquido o gas). En la mayoría de los líquidos y sólidos la radiación térmica es un fenómeno superficial, de forma que la radiación térmica es la energía emitida por la materia a 1 $\mu$m de espesor de la superficie.

- El transporte de la radiación térmica no requiere de un medio físico material, como ocurre en la conducción y en la convección; por el contrario, la transferencia de la radiación es más eficaz en el vacío.

- Se rige por ley de Stefan-Boltzmann (Stefan la obtuvo de forma experimental en 1879 y posteriormente Boltzmann analíticamente a través de las leyes de la Termodinámica). Según esta ley, la potencia térmica q [W] emitida por un cuerpo de área A cuya temperatura superficial es $T_s$ está dada por:




$$q = \epsilon \sigma A T_s^4$$

donde $0<\varepsilon<1$ es una propiedad, denominada emitancia o emisividad, que depende del material de la superficie, del acabado y de la temperatura del cuerpo, $\sigma=5{,}67\cdot 10^{-8}$ $W/m^2\cdot K^4$ es la constante de Stefan-Boltzmann y $T_s$ la temperatura superficial en grados Kelvin.

De la expresión anterior puede observarse cómo para una temperatura superficial $T_s$ determina, la máxima potencia radiante emitida corresponde con los cuerpos que presentan $\varepsilon=1$, los cuales se denominan cuerpos radiantes ideales o también cuerpos negros, dado que a temperatura ambiente se presentan de color negro. Designando con el subíndice *b* a los cuerpos negros:

$$q_b = A \sigma T_s^4$$

En radiación se acostumbra a designar por E a la potencia radiante por unidad de área, esto es:

$$E = \frac{q}{A} = \epsilon \sigma T_s^4 \qquad [W/m^2]$$

y para el cuerpo negro:

$$E_b = \frac{q_b}{A} = \sigma T_s^4 \qquad [W/m^2]$$

Otra característica del cuerpo negro es que la intensidad radiante desde cualquier punto de la superficie, por ejemplo el P, tiene el mismo valor independientemente de la dirección considerada. Esto se expresa diciendo que el cuerpo negro es un emisor difuso. Por contra, la mayoría de los cuerpos reales suelen tener alguna dirección preferente en la que la emisión es mayor (en la figura 1.6 en dirección perpendicular a P). No son, por tanto, emisores difusos.

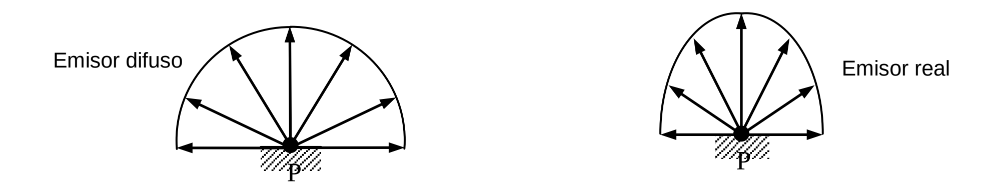


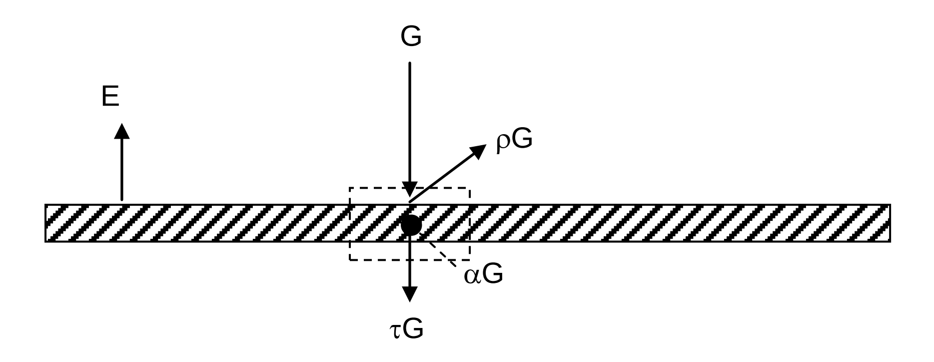

Figura 1.6. Emisión difusa y no difusa.

La emisividad ε de los cuerpos reales es una propiedad global que incluye la contribución de todas las longitudes de onda comprendidas entre 0,1 y 100 μm que constituyen la radiación térmica, y cuyo valor es distinto para cada longitud de onda. A pesar de ello, en la mayoría de los problemas de interés técnico no se suele tener en cuenta dicha dependencia de ε con la longitud de onda, designándolo como cuerpo gris.

En esta asignatura, y coherentemente con la práctica habitual en la técnica, consideraremos los cuerpos reales como grises difusos.

## COMPORTAMIENTO RADIATIVO DE UNA SUPERFICIE REAL

Considérese una lámina de un material sobre la que incide una radiación térmica por unidad de área, y a la que se denominará irradiancia o radiación incidente G [W/m$^2$]. Parte de esta radiación será reflejada, $\rho\cdot G$, otra absorbida, $\alpha\cdot G$, y la restante, y sólo si el material no es completamente opaco, atravesará el material como radiación transmitida, $\tau\cdot G$. Además, la lámina contará con su emisión propia E [W/m$^2$].




Haciendo el equilibrio energético respecto a las energías incidente, reflejada, absorbida y transmitida, resulta:

$$G=\rho\cdot G+\alpha\cdot G+\tau\cdot G$$

de donde:

$$1=\rho+\alpha+\tau$$

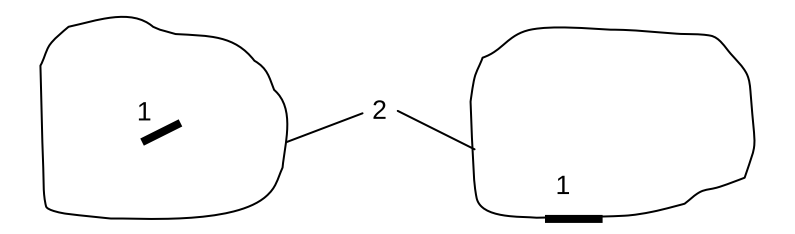
que constituye la ecuación general que relaciona las propiedades radiativas ρ (reflectancia), α (absortancia) y τ (transmitancia), las cuales expresan las fracciones de energía térmica reflejada, absorbida y transmitida, respectivamente, respecto a un radiación incidente G. ρ, α y τ dependen fundamentalmente del material y rugosidad de la superficie, de la longitud de onda de la radiación incidente, de la

inclinación de ésta y en el caso de sustancias semitransparentes del espesor de material.

Algunos casos de interés son:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Cuerpo opaco: | $\tau=0$ | $\Rightarrow$ | $\rho+\alpha=1$ | (la mayoría) |
| Cuerpo transparente ideal: | $\tau=1$ | $\Rightarrow$ | $\alpha=\rho=0$ | (idealización) |
| Cuerpo negro: | $\varepsilon=\alpha=1$ | $\Rightarrow$ | $\tau=\rho=0$ | (idealización) |

Un caso importante de intercambio de energía radiante está constituido por una pequeña superficie 1 opaca ($\tau=0 \rightarrow \alpha+\rho=1$) e isoterma a temperatura $T_1$ que se encuentra completamente envuelta por otra superficie 2 isoterma mucho mayor, a temperatura $T_2$.




En tal caso la radiación incidente sobre la superficie pequeña puede aproximarse por la emisión de un cuerpo negro a la temperatura de la superficie envolvente (la 2, ver capítulo de radiación):

$$G_1 = E_{b2} = \sigma T_2^4$$

El flujo neto de energía radiante que abandona la superficie 1 está dado por:

$$q''_{\text{rad-1}} = \frac{q_{\text{rad}}}{A} = E_1 + \rho_1 G_1 - G_1 = E_1 - (1-\rho_1)G_1$$

Pero como:

$$\begin{cases} E_1 &= \epsilon_1 E_{b1} \\ \alpha_1 + \rho_1 &= 1 \quad \rightarrow \quad 1-\rho_1 = \alpha_1 \end{cases}$$

resulta:

$$q''_1 = \epsilon_1 E_{b1} - \alpha_1 G_1 = \epsilon_1 \sigma T_1^4 - \alpha_1 \sigma T_2^4 = \sigma\left(\epsilon_1 T_1^4 - \alpha_1 T_2^4\right)$$

Si 1 se comporta como una superficie gris ($\alpha_1=\varepsilon_1$):

$$q_1'' = \sigma(\epsilon_1 T_1^4 - \alpha_1 T_2^4) = \sigma\epsilon_1 \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

Y la potencia calorífica total:

$$q_1 = A_1 q_1'' = \sigma\epsilon_1 A_1 \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

Si $T_1<T_2$ el flujo calorífico neto de la superficie 1 tiene lugar hacia ella en vez de hacia el exterior ($T_1>T_2$).

La ecuación anterior acostumbra a expresarse en la forma linealizada:

$$q_1 = h_r A_1 \left(T_1 - T_2\right)$$

Donde $h_r = \epsilon_1\sigma\left(T_1^2 + T_2^2\right)\left(T_1 + T_2\right)$ se denomina coeficiente de transferencia de calor por radiación o simplemente coeficiente de radiación, careciendo de significado físico. $h_r$ depende fuertemente de la temperatura, mientras que la dependencia del coeficiente de convección h con la temperatura es generalmente más pequeña.

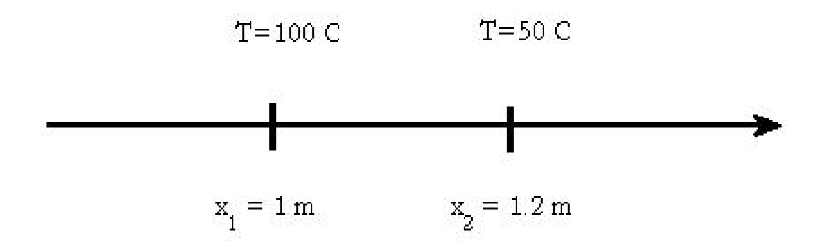
En radiación también puede hacerse uso del concepto de resistencia térmica, denominada en este caso resistencia radiativa:

$$R = \frac{1}{h_r A}$$

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{h_r A}} = \frac{\Delta T}{R}$$

## Problemas

**Problema 1.** Consideremos un conductor 1-D y en las temperaturas en dos puntos se muestran en la figura siguiente:




Sabemos además que $A$=0.3 $m^2$ y $K$=2 $W/mk$. ¿Cuál es el calor transmitido de $x_1$ a $x_2$ durante un minuto si el flujo de calor no es una función del tiempo?

*Sol.* Si queremos usar MATLAB como calculadora el código será:

```
>> clc, clear     % sirve para borrar eventuales datos precedentes
>> K=2; dx=0.2; A=0.3; dt=60;
>> T1=100; T2=50;
>> Q= -A*K*(T2– T1 )*dt/dx
>> Q=18000    % calor medido en Joules.
```

**Problema 2.** Se calienta 1kg de agua que está a 15 $^0$C hasta 90 $^0$C en una tetera eléctrica de 1000 W. La masa de la tetera es de 0.5 kg y tiene un calor específico de 0.7 kJ/kg $^0$C. Sea el calor específico del agua 4.18 kJ/kg $^0$C, determina cuánto tiempo tardará el agua en calentarse.

*Sol.* Supongamos que la perdida de calor de la tetera sea despreciable y que la propiedades del sistema no dependan del tiempo. El balance de energía del sistema agua-tetera es

$$E_{entra} - E_{sale} = \Delta E$$
$$E_{entra} = \Delta U_{agua} - \Delta U_{tetera}$$
$$E_{entra} = (mC\Delta T)_{agua} + (mC\Delta T)_{tetera}$$

En MATLAB podemos escribir lo siguiente

```
>> clc, clear
>>ma=1; Ca=41.8; dT=75; mt=0.5; Ct=0.7;
>>E=ma*Ca*dT+mt*Ct*dT
```

```
>> E= 339.75  % en kJ
```

La tetera tiene una potencia de 1200 W, o sea suministra 1.2 kJ por segundo. El tiempo necesario para que suministre 339kJ será

$$\Delta t = \frac{\text{energía transferida}}{\text{velocidad transferencia}} = \frac{339.75}{1.2} = 283 \text{ s}$$

**Problema 3.** A veces cuando aparcamos un coche en la calle durante una noche despejada al día siguiente podemos encontrar el parabrisas con una capa de hielo, incluso si la temperatura del aire se mantuve siempre por encima de la temperatura de de congelación.

a) Explica el fenómeno.

*Sol.* Si llamamos al calor suministrado al parabrisas con $q_{sum}$ entonces tenemos

$$q_{sum} = q_{rad} + q_{conv}$$

Asumimos que no haya calefacción dentro del coche, que los intercambios de calor entre el parabrisas y el interior del coche sean los mismos y que el aire está estancada en el coche, de manera que $h \simeq 0$ y $q_{sum} \simeq 0$ de manera que tenemos

$$\varepsilon\sigma T^4 + h(T - T_\infty) = 0$$

Que es una ecuación no linear en *T*. Además hemos supuesto que el parabrisas es más caliente del aire.

*b)* Dando los siguientes valores: $\varepsilon = 0.4,\ T_\infty = 278K,$ h=15.0664 W/m$^2K$ encuentra el valor de *T*.

En MATLAB escribimos

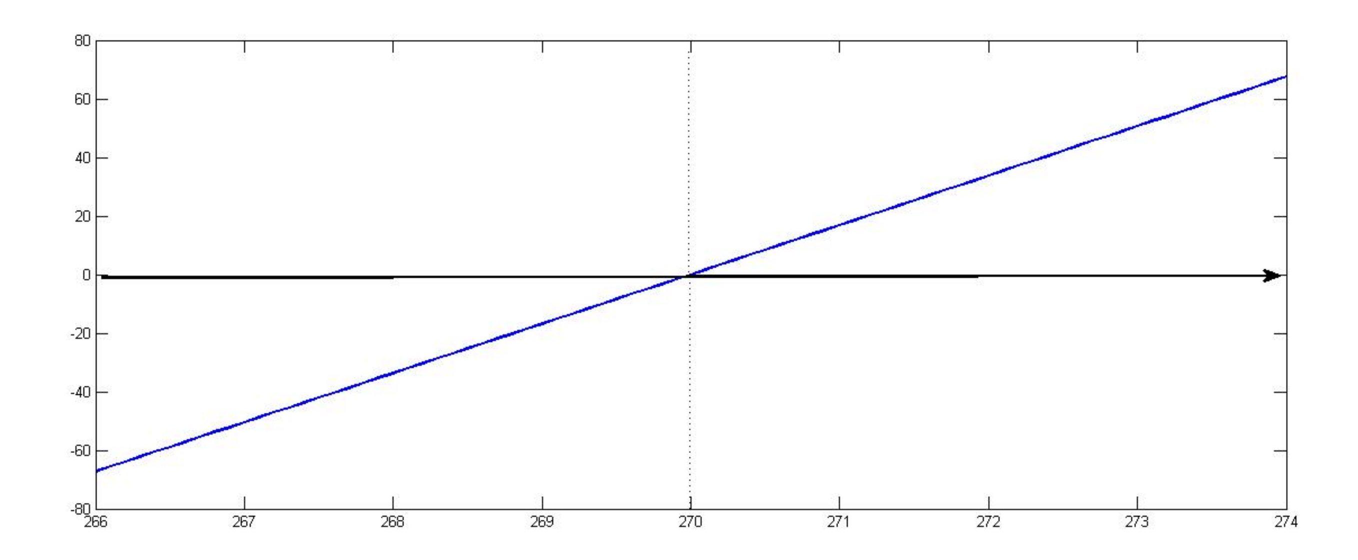
```
>> clc; clear
>> eps=4; sig=5.67 *10^(-8); Tinf=278; h=15.0664;
>> Tb=Tinf  % valor inicial de prueba
```

% $T^4 = -3T_b^4 + 4T_b^3 T$ hemos linearizado $T^4$

```
%  usamos el método de Newton_Raphson
>> for iter=1:10
>> Jac=eps*sig*Tb^3+h;
>> T=(eps*sig*3*3Tb^4+h*Tinf)/Jac
>> Tb=T; % actualizamos el valor de Tb
>> end
>> T  % T=270
```

Si queremos hacer una gráfica de la función y=sig*eps*T^4+h(T-Tinf); escribimos
>> T=266:0.1:274; % creamos un vector donde la T varía de 266 hasta 274
>> y=sig*eps*T.^4+h*(T-Tinf);
>> plot(T,y)

Queremos ver dónde esa gráfica encuentra el eje X (y=0).

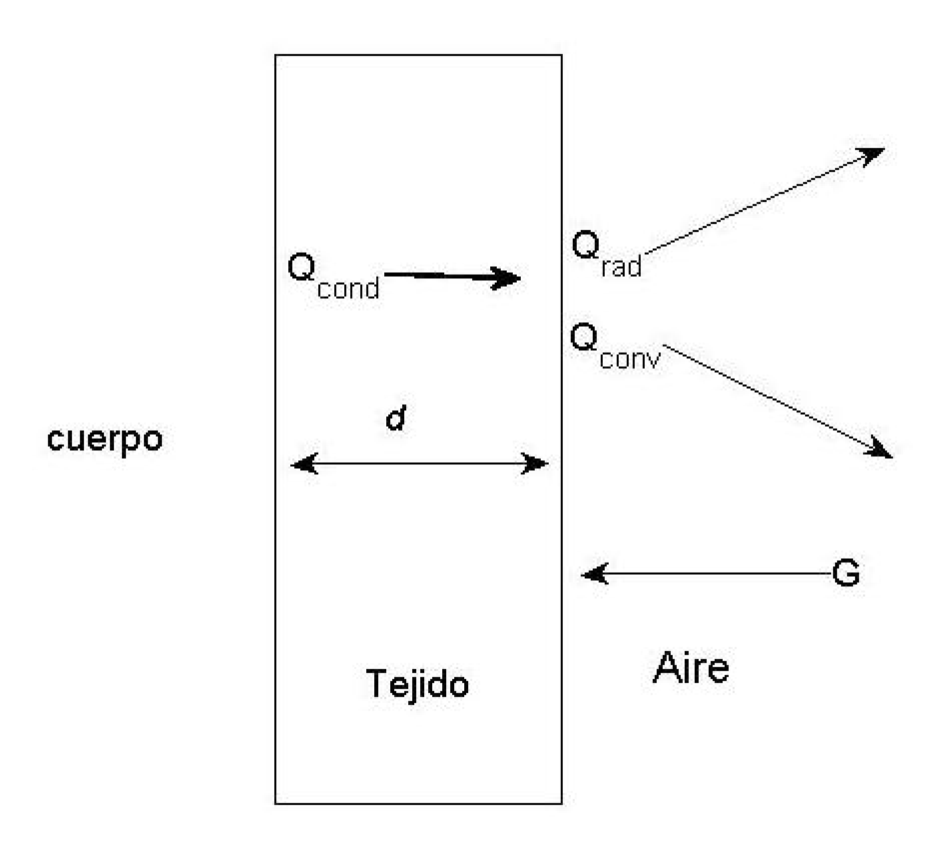



Entonces $T_S$ es 270K, la humedad del aire condensará y se congelará sobre el parabrisas.
Si el coche está aparcado cuando el cielo es nublado, o cerca de un muro de un edificio, por debajo de hojas de un árbol etc. Entonces habrá una radiación que viene de la superficie de estos objetos. Habrá que modificar la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\varepsilon\sigma T^4 + h(T - T_\infty) - \alpha\sigma T^4{}_{\text{entorno}} = 0$$

Incluyendo este término se aumenta el valor de *T*. Eso explica porque a veces los parabrisas de un lado están cubiertos de hielo y los del otro lado no.

**Problema 4**. Observando la figura queremos encontrar la conductividad térmica del tejido en contacto con nuestra piel. Asumimos que T es linear dentro del tejido.



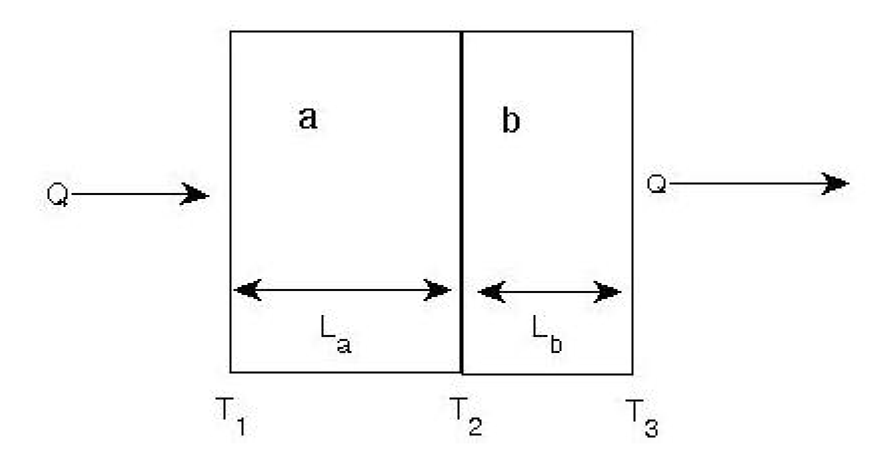

*Sol.* El balance energético sobre la piel es:

$$K_{\text{tejido}}(T_1 - T_2) / d = q_{rad} + q_{conv} - G$$

Usando los datos necesarios podemos resolver la ecuación en MATALB:

```
>> clc; clear
>> sig=5.76e-8; h=5;
>> e1=0.98;
>> d=0.0015;
>> T1=37+273; T2=36.5+273; Tinf=298;
>> G=sig*Tinf^4;  % radiación del exterior
>> qconv=h(T2-Tinf);
>> qrad=e1*sig*T2^4;
>> qout= qconv+q rad –G;
>> k = qout/(T1-T2);   % k=0.3606
```

**Problema 5**. Determina una expresión de la transferencia de la tasa de calor en el estado estacionario de un plano compuesto de dos materiales como se muestra en la figura aquí abajo




*Sol.* En el estado estacionario el flujo unidimensional $q$ es el mismo en cada inferfaz

$$q = q_{12} = q_{23} = q_3$$

El flujo de calor a través del material $a$ es

$$q = -k_a A \frac{T_2 - T_1}{L_a}$$

E través del material $b$

$$q = -k_b A \frac{T_3 - T_2}{L_b}$$

Podemos rescribir las ecuaciones anteriores de la forma

$$T_1 - T_2 = q \frac{L_a}{k_a A} \qquad T_2 - T_3 = q \frac{L_b}{k_b A}$$

Si sumamos estas dos ecuaciones tenemos:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{L_a / K_a A + L_b / K_b A}$$

Si interpretamos a $L_a/K_a A$ como una resistencia térmica del material $a$ y la temperatura como un potencial térmico, la ecuación anterior se convierte en una ley de Ohm térmica.

Ahora supongamos que $L_{a}$= 0.03 m, $L_b$=0.05 m, $T_1$=40 ⁰C, $T_3$=-45 ⁰C, $k_a$=17 W/mK, $k_b$=1.8W/mK, encontrar la temperatura de interfaz $T_2$

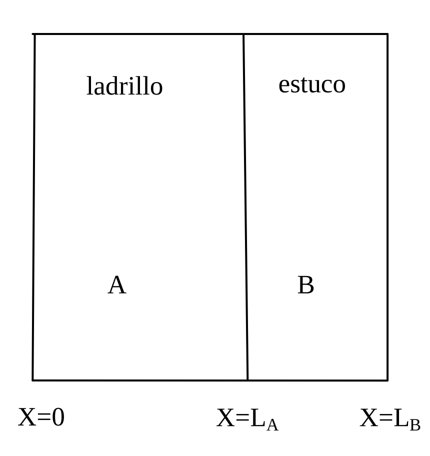
Si despejamos $T_2$ tenemos

$$T_2 = \frac{(k_a/L_a)T_1 + (k_b/L_b)T_3}{(k_a/L_a) + (k_b/L_b)}$$

Podemos sustituir los valores que no dan y obtener $T_2$ = 34.9 ⁰C.

**Problema 6**. Consideremos el muro de una habitación que separa el flujo de aire del exterior del flujo de aire de la habitación como se muestra en la figura aquí abajo. A principio, supongamos que no haya el estuco. Ahora supongamos que la temperatura depende linealmente de $x$, es decir:

$$T(x) = d_0 + d_1 x$$




Determina las dos constantes. Luego resuelve el mismo problema considerando la presencia del estuco.

*Sol.* El balance energético en el punto $x = 0$ lleva a

$$h_1(T_{\infty 1} - T(0)) = -k\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0}$$

Que puede escrita en la siguiente forma:

$$h_1 d_0 - k d_1 = h_1 T_{\infty 1}$$

De la misma manera se puede escribir el balance energético en el punto $x = L_a$

$$h_2 d_0 + (h_2 L + k) d_1 = h_2 T_{\infty 2}$$

Ahora escribimos el código MATLAB para resolver estas dos ecuaciones lineales para $d_0$ y $d_1$. Supongamos la temperatura del aire de la habitación sea 25 $^0$C y la del exterior 2 $^0$C.

```
>> clc; clear
>> h1=20; h2=40; h=1.4; L=0.2;
>> Tinf1=25; Tif2=2;
>> a(1,1)=h1; a(1,2)=-k; b(1)=h1*Tinf1;
>> a(2,1)=h2; a(2,2)=h2*L+k; b(2)=h2*Tinf2;
>> d=a\b';  % resolvemos el sistemas con el comando división izquierda
>> T1=d(1)  % =19.7213 C
>> T2=d(2) % =4.6393 C
>> % averiguamos el balance de energía
>>qL=h1*(25-T1)  % 105.57
>>qR=h2*(T2-2)    % 105.57
```

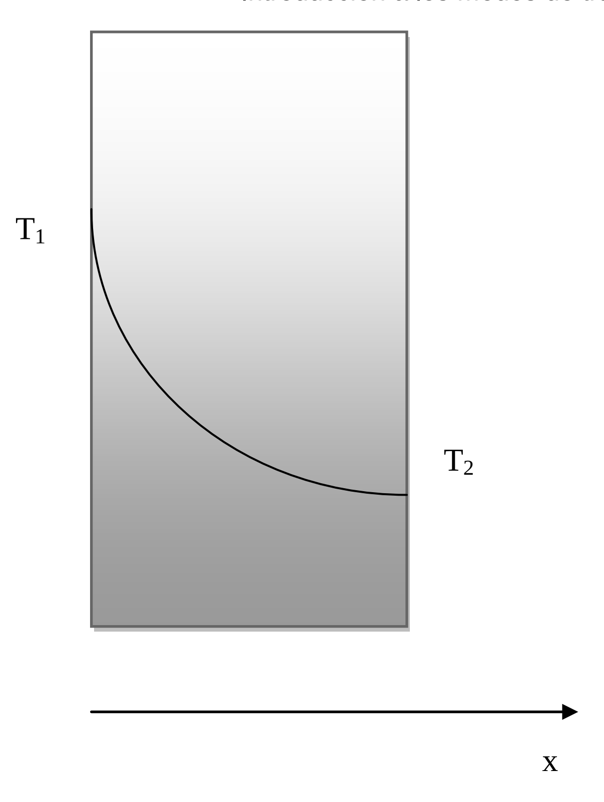
Si ahora añadimos el estuco tendremos dos perfiles de la temperatura:

$$T_A(x) = d_0 + d_1 x$$
$$T_B(x) = d_2 + d_3 x$$

En MATLAB escribiremos:

```
>> h1=20; h2=40; ka=1.4; La=0.2;kb=0.7; Lb=0.06; Lt=La+Lb;
>> a(1,1)=h1; a(1,2)=-ka; b(1)=25*h1;
>> a(2,1)=1; a(2,2)=La; a(2,3)=-1; a(2,4)=-La; b(2)=0;
>> a(3,2)= -ka; a(3,4)= kb; b(3)=0;
>> a(4,3)= h2; a(4,4)=h2*Lt+kb; b(4)= 2*h2;
>> d=a\b';
>> T(1)=d(1)  % =21.21 0C
>> T(2)= d(1)+d(2)*La  % = 10.38 0C
>> T(3)= d(3)+d(4)*Lt  % = 3.89 0C
```

**Problema 7**. Obtener una expresión analítica del perfil de temperatura $T(x)$ de un plano que se muestra en la figura aquí abajo que tiene una temperatura uniforme $T_1$ y $T_2$ un los puntos $x_1$ y $x_2$ respectivamente, y la conductividad térmica varía linealmente con la temperatura de la manera siguiente: $k(t) = k_0(1 + bT)$




*Sol.* De la ecuación de Fourier tenemos

$$q = -kA\frac{dT}{dx}$$

Si integramos de $x_1$ a un valor arbitrario $x$ tenemos:

$$\frac{q}{A}\int_{x_1}^{x} dx = -k_0\int_{T_1}^{T}(1+bt)dt$$

$$\frac{q}{A}(x-x_1) = -k_0\left[\left(T+\frac{b}{2}T^2\right)-\left(T_1+\frac{b}{2}T_1^{\,2}\right)\right]$$

La curva tiene que pasar por el punto $(x_2, T_2)$ así que tenemos:

$$-\frac{2q}{bAk_0}\left(x_2-x_1\right) = 2\left(T_m+\frac{1}{b}\right)\left(T_2-T_1\right)$$

donde $T_m = \left(T_1+T_2\right)/2$. Se puede despejar T y obtener:

$$T = -\frac{1}{b}+\left[\left(T_1+\frac{1}{b}\right)^2+2\left(T_m+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{T_2-T_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)\right]^{1/2}$$

En el caso de que $b=0$ tenemos:

$$T = T_1+\frac{T_2-T_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

# Bibliografía

Incropera, Frank P.; DeWitt, David P. *Fundamentos de Transferencia de Calor*. Ed. Pearson.

Kreith, Frank; Bohn, Mark S. *Principios de Transferencia de Calor*. Thomsom Learning.

Nellis, Gregory; Klein, Sanford. *Heat Transfer*. Cambridge University Press.

**CUADERNO**




Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

